

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Teste — Semana 7 — 3 de Novembro de 2020
(CURSOS: LMAC, MEFT)

- [6,0 val] 1. Use o teorema fundamental do cálculo para determinar o valor do integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z+i} dz,$$

em que $\gamma(t) = \sqrt{3}e^{-it}$, com $t \in [0, \pi]$.

2. Sejam α uma constante real e $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$u(x, y) = (\alpha y)^2 - 2y + 2x^2 - 3\alpha x^2.$$

- [4,0 val] (a) Determine os valores de α para os quais pode justificadamente garantir que u é a parte real de uma função inteira f .

- [5,0 val] (b) Para $\alpha = 2$, determine a função inteira f tal que $\operatorname{Re} f = u$ e que verifica $f(i) = 2+i$.

- [5,0 val] (c) Sendo f a função determinada na alínea (b), e γ um caminho fechado tal que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-i} dz = -10$, calcule

$$\int_{\gamma} \left(\frac{f(z)(z+i)}{z-i} \right)^2 dz.$$