

# *Análise Complexa e Equações Diferenciais*

## 1º Semestre 2020/2021

Teste — Semana 7 — 3 de Novembro de 2020  
 (Cursos: LMAC, MEFT )

[6,0 val] 1. Use o teorema fundamental do cálculo para determinar o valor do integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z+i} dz,$$

em que  $\gamma(t) = \sqrt{3} e^{-it}$ , com  $t \in [0, \pi]$ .

2. Sejam  $\alpha$  uma constante real e  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por

$$u(x, y) = (\alpha y)^2 - 2y + 2x^2 - 3\alpha x^2.$$

[4,0 val] (a) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais pode justificadamente garantir que  $u$  é a parte real de uma função inteira  $f$ .

[5,0 val] (b) Para  $\alpha = 2$ , determine a função inteira  $f$  tal que  $\operatorname{Re} f = u$  e que verifica  $f(i) = 2+i$ .

[5,0 val] (c) Sendo  $f$  a função determinada na alínea (b), e  $\gamma$  um caminho fechado tal que  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-i} dz = -10$ , calcule

$$\int_{\gamma} \left( \frac{f(z)(z+i)}{z-i} \right)^2 dz.$$